

Задания для текущего контроля знаний

Тема 1. Матрицы и действия над ними.

1.1 Вычислить $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1.2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти: а) $A + E$; б) $2 \cdot A - 3 \cdot B$.

Ответ: а) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

1.3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти: а) $A + B$; б) $A^T + B^T$.

Ответ: а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

1.4. Вычислить произведения матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) 11; б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 7 & -8 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$.

1.5. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Вычислить произведения: а) $A \cdot B$; б) $B \cdot A$; в) $B^T \cdot A^T$.

Ответ: а) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

1.6. Вычислить произведения матриц:

а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & -4 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & -3 \\ -16 & -11 & -15 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 4 \\ 11 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 22 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1.7. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти: $A \cdot B - B \cdot A$.

$$\text{Ответ: } \begin{pmatrix} -2 & -1 & 9 \\ -2 & -6 & 3 \\ -8 & -9 & 8 \end{pmatrix}.$$

1.8. Вычислить $p_2(A)$, если $p_2(x) = x^2 - 2x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Ответ: } p_2(A) = O.$$

Тема 2. Определители.

2.1. Вычислить определители второго порядка:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \text{ в) } \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}.$$

$$\text{Ответ: а) } -1; \text{ б) } 5; \text{ в) } 4ab.$$

2.2. Вычислить определители третьего порядка:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}; \text{ в) } \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Ответ: а) } -3; \text{ б) } 0; \text{ в) } -12.$$

2.3. Не вычисляя определителей, указать, почему они равны нулю:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 17 \\ 2 & 2 & 15 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix}; \text{ в) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ответ: а) есть нулевая строка; б) имеются два одинаковых столбца; в) первые две строки пропорциональны.

2.4. Вычислить определители $|AB|$ и $|BA|$ произведений матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, применяя свойство определителя произведения. Сделать проверку,

вычисляя сначала произведения AB и BA , а затем определители $|AB|$ и $|BA|$.

$$\text{Ответ: } AB = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\det AB = 20 = (-5) \cdot (-4) = \det BA.$$

$\det A \quad \det B$

2.5. Вычислить определители при помощи элементарных преобразований:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 9 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ответ: а) -1 ; б) -3 .

Тема 3. Ранг матрицы. Базисный минор.

3.1. По определению найти базисный минор и вычислить ранг матрицы:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{ б) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}; \text{ в) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ г) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{ д) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: а) базисного минора нет, $\text{rg } A = 0$; б) $M_1^1 = 1$, $\text{rg } A = 1$;

в) $M_{12}^{12} = 1$, $\text{rg } A = 2$; г) $M_2^1 = 1$, $\text{rg } A = 1$; д) $M_{12}^{23} = -1$; $\text{rg } A = 2$.

3.2. Вычислить ранги матриц, приводя их к ступенчатому виду (методом Гаусса):

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 13 & 16 \end{pmatrix}; \text{ б) } A = \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}; \text{ в) } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: а) $\text{rg } A = 2$; б) $\text{rg } A = 3$; в) $\text{rg } A = 2$.

3.3. Вычислить ранг матрицы методом окаймляющих миноров:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 13 & 16 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Указания: а) можно рассмотреть цепочку окаймляющих миноров:

$$M_1^1 \neq 0, M_{13}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0, M_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 13 \end{vmatrix} = 0, M_{134}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 3 & 13 & 16 \end{vmatrix} = 0;$$

б) можно рассмотреть цепочку окаймляющих миноров: $M_1^1 \neq 0$,

$$M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad M_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad M_{124}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_{123}^{124} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad M_{124}^{124} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ответ: а) $\text{rg } A = 2$; б) $\text{rg } A = 2$.

3.4. При каждом действительном значении параметра вычислить ранг матрицы:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \\ 2 & 7 & \lambda \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: а) $\text{rg } A = 2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$; б) $\text{rg } A = 2$ при $\lambda = 3$, $\text{rg } A = 3$ при $\lambda \neq 3$.

3.5. В данной системе столбцов найти все максимальные линейно независимые подсистемы:

$$\text{а) } A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Указания: а) составить матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ и найти ее базисные миноры; б)

составить матрицу $A = (A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4)$, убедиться в том, что $\text{rg } A = 4$.

Ответ: а) любые два столбца образуют максимальную линейно независимую подсистему данной системы столбцов; б) искомая подсистема совпадает со всей системой A_1, A_2, A_3, A_4 , так как данная система столбцов линейно независима.

Тема 4. Обратная матрица.

4.1. Найти матрицы, обратные к данным:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: а) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0,6 & 0,2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 0,6 & -0,2 \\ 0,4 & -0,3 \end{pmatrix}.$$

4.2. Найти матрицы, обратные к данным:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{д) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: а) } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{д) } \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ ж) } \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \text{ з) } \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

4.3. Доказать, что матрица A ортогональная, т.е. $A^{-1} = A^T$: $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$.

4.4. Решить матричные уравнения:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } A \cdot X + 2 \cdot X = B + C \cdot X, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } X \cdot A + 2 \cdot X = B + X \cdot C, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{д) } \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}; \quad \text{е) } Y \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: а) } X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \text{ б) } X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}; \text{ в) } X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } X = \begin{pmatrix} 0,6 & 1,4 \\ 0,6 & 1,4 \end{pmatrix}; \text{ д) } X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \text{ е) } Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тема 5. Системы линейных уравнений.

5.1. Решить системы уравнений по правилу Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8; \end{cases}$$

Ответ: а) $x_1 = 1, x_2 = -1$; б) нет решений; в) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

5.2. Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 = 8; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 3x_1 + 6x_2 = 10; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 3x_1 + 6x_2 = 9; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3; \end{cases} \quad \text{д) } \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -5, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{е) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 2; \end{cases}$$

Ответ: а) $x_1 = x_2 = 1$; б) система несовместна; в) $x_1 = 3 - 2x_2$, $x_2 \in \mathbb{R}$;

г) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$; д) $x_1 = -1 + x_2$, $x_3 = 3$, $x_2 \in \mathbb{R}$;

е) $x_1 = 0,5 + 0,5x_3$, $x_2 = 0,5 + 1,5x_3 - x_4$, $x_3 \in \mathbb{R}$, $x_4 \in \mathbb{R}$;

формулы общего решения определяются неоднозначно.

5.3. Найти фундаментальную систему решений и записать структуру общего решения:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: а) } x = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } x = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } x = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная система решений определяется неоднозначно.

5.4. Найти фундаментальную матрицу системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x_1 + 24x_2 - 7x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 0; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: а) } \Phi = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \Phi = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -22 \\ 0 & 16 \end{pmatrix};$$

фундаментальная матрица определяется неоднозначно.

Тема 6. Собственные векторы и собственные значения.

6.1. Найти собственные значения и соответствующие собственные векторы матриц:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{д) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{е) } \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: а) } \lambda_1 = -1, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = -2, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \lambda_1 = 0, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 10, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

г) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, (1 \ 1 \ 0)^T, (-1 \ 0 \ 1)^T, \lambda_3 = 3, (-1 \ 1 \ 0)^T;$

д) $\lambda_1 = 1, (1 \ 1 \ 1)^T, \lambda_2 = -1, (1 \ -3 \ -5)^T, \lambda_3 = 2, (1 \ 0 \ 1)^T;$

е) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2, (1 \ 2 \ 1)^T.$

Собственные векторы матриц определяются неоднозначно.

Тема 7. Квадратичные формы.

7.1. Записать квадратичные формы в матричном виде, найти их ранги и дискриминанты:

а) $q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2;$ б) $q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2;$ г) $q(x_1, x_2) = 2x_1x_2;$

д) $q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_2^2;$ е) $q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 6x_2x_3 - x_3^2.$

Ответ: а) $q(x) = x^T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x, r = 1, \Delta = 0;$

б) $q(x) = x^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x, r = 2, \Delta = 1;$ в) $q(x) = x^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x, r = 2, \Delta = -1;$

г) $q(x) = x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x, r = 2, \Delta = -2;$ д) $q(x) = x^T \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} x, r = 3, \Delta = -16.$

7.2. Привести квадратичную форму к каноническому виду:

а) $q(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - 5x_2^2;$ б) $q(x) = -2x_1^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + x_2^2 + 5x_2x_3 + 4x_3^2.$

Указание: канонический вид квадратичной формы определяется неоднозначно.

7.3. Используя критерий Сильвестра, выяснить знакоопределенность квадратичной формы

а) $q(x) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2;$ б) $q(x) = -2x_1^2 + 6x_1x_2 + x_1x_3 - 5x_2^2 - 7x_3^2.$

Ответ: а) положительно определенная; б) отрицательно определенная.